55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551211

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$2(z-1)-x=55\,, \tag{1}$$
$$4xy-8z=12\,, \tag{2}$$
$$a(y+z)=11\,. \tag{3}$$

Man bestimme die beiden größten reellen Werte für a, zu denen es positive ganze Zahlen x, y, z gibt, die das Gleichungssystem lösen.

Zu jeder dieser Lösungen bestimme man das Produkt xyz.

551212

Im alten Ägypten wurden Längen in der Einheit Königselle (*meh-nesut,* etwa 0,524 m) gemessen. Ein ägyptischer Pharao möchte eine gerade quadratische Pyramide bauen lassen, bei der die Längen von Höhe, Grundkante und Seitenkante ganzzahlige Vielfache von 10 Königsellen sein sollen. Außerdem verlangt er, dass die Faktoren, mit denen die Vielfachen gebildet werden, drei aufeinanderfolgende Zahlen sind.

Man stelle fest, ob dies möglich ist. Sollte es der Fall sein, dann ermittle man für alle derartigen Pyramiden jeweils die Längen von Höhe, Grundkante und Seitenkante.

Hinweis: Es ist nicht gefordert, dass unbedingt die Höhe die kleinste und die Seitenkante die größte Länge hat.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551213

Man bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die $(a+1)(b+1)$ durch ab teilbar ist.

551214

In einem Dreieck seien a und b die Längen der beiden kürzesten Seiten. Weiterhin mögen r und R den Inkreisradius beziehungsweise den Umkreisradius dieses Dreiecks bezeichnen. Man beweise die Ungleichung

$$ab > 4rR\,.$$